3. MOMENT ÇIKARAN FONKSİYON TEKNİĞİ

Bağımsız rastgele değişkenler dizisi verildiğinde bu rastgele değişkenlerin toplamları şeklinde tanımlanan yeni dönüşüm değişkenlerinin dağılımlarını bulmak amacıyla yaygın bir şekilde kullanılır. $X_1, X_2, \dots, X_n$ rastgele değişkenleri *bağımsız* olsun.
i = 1,2, … , n için X_i rastgele değişkenlerinin moment üreten fonksiyonlarının $M_{X_i}(t)$ olduğu kabul edilsin.
Y = U $(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ dönüşümü tanımlansın. Moment çıkaran fonksiyonun tanımından Y rastgele değişkeninin Moment çıkaran fonksiyonu

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i})$$
$$= E(e^{tX} . e^{tX_2} \dots . e^{tX_n})$$

X_i'ler bağımsız olduğundan

$$= E(e^{tX_1}). E(e^{tX_2}) \dots E(e^{tX_n})$$
$$M_Y(t) = M_{X_1}(t). M_{X_2}(t) \dots M_{X_n}(t)$$

şeklinde elde edilir.

Örnek: X rastgele değişkeni μ ortalamalı, σ^2 varyanslı Normal dağılıma sahip ise

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

rastgele değişkeninin dağılımını Moment çıkaran fonksiyon tekniğini kullanarak bulunuz?

Çözüm:

X ~ N (μ , σ^2) ise X rastgele değişkeninin Moment çıkaran fonksiyonunun

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

olduğu biliniyor. Y rastgele değişkeninin Moment çıkaran fonksiyonu

$$M_Y(t) = E\,(e^{tY}) = E\,(e^{t(\frac{X-\mu}{\sigma})}) = E\,(e^{\frac{tX}{\sigma}-\frac{t\mu}{\sigma}}) = E\,(e^{\frac{tX}{\sigma}}.e^{-\frac{t\mu}{\sigma}})$$

$$= e^{-\frac{t\mu}{\sigma}}.\,E\,(e^{\frac{tX}{\sigma}}) = e^{-\frac{t\mu}{\sigma}}.\,M_X\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

$$M_Y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

elde edilir. Elde edilen bu Moment çıkaran fonksiyon ise Standart normal dağılımın Moment çıkaran fonksiyonu olduğundan Y rastgele değişkeni Standart normal dağılıma sahiptir ve $Y \sim N(0,1)$ şeklinde gösterilir.

Kaynaklar

(1) Akdi, Y. (2010) Matematiksel İstatistiğe Giriş, Gazi Kitabevi, Ankara.

(2) Hogg, R. V. And Craing, A. T. (1989). Introduction to Mathematical Statistics. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.

(3) Mendenhall, W., Wackerly, D. D. and Scheaffer, R. (1990). Mathematical Statistics with Applications. 4th Ed., Boston: PWS-Kent Publishing Company.

(4) Hogg, R. V. And Tanis, E. A. (1993) Probability and Statistical Inference. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.

(5) Larson, H. J. (1982). Introduction to Probability Theory and Statistical Inference. 3rd Ed., New York: John Wiley ve Sons.